

Глава 3 Уравнения газовой динамики

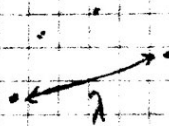
§1. Основные понятия

Предмет изучения: движение сплошных жидкостей и газобразных сред.

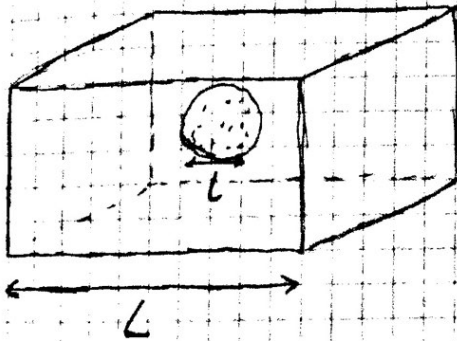
Способ: Метод моделирования

Предположение: 1) "сплошность" среды (среда заполняет пространство непрерывно)

λ - длина свободного пробега (расстояние, пробегаемое частицей от соударения до соударения)



Мы не хотим изучать средние характеристики, а не отдельные микрочастицы.



L - характерный размер области

λ - элементарный объём, жидкая (газовая) частица

характерный размер $\rightarrow 0$

(бесконечно мал в геометрическом смысле)

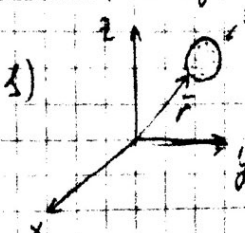
$\Rightarrow$ Хотим: $\lambda \ll L \ll L$ - критерий применимости гипотезы о сплошности среды.

"Сплошность" среды существенно, она позволяет использовать интегральное и дифференциальное исчисление.

2) Абсолютность времени

3) Малость скорости движения частиц по сравнению со скоростью света

Параметры газа:

1)  r - положение частицы в некоторой системе координат
Изменение положения "жидкой" частицы в пространстве со временем определяется скоростью: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, t - время

2) ρ - плотность (масса вещества в единице объёма), $\rho = \frac{m}{V}$

$\nu = \frac{1}{\rho}$ - удельный объём

3) p - давление газа, $p = \frac{F}{S}$ (перпендикулярно к поверхности)

4) T - температура

в данном случае именно микрочастиц

5) n - концентрация (число частиц в единице объёма)

6) S - энтропия

Идеальный газ - отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия (только соударения)

Равновесные процессы - в V налёт газ в термодинамическом равновесии

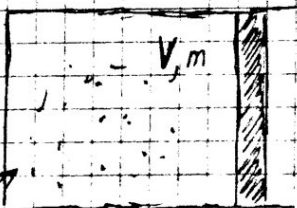
§2 Элементы термодинамики, Уравнение состояния идеального газа

Внутренняя энергия жидкой частицы

Закон сохранения энергии для термодинамической системы

I начало термодинамики

Б) Изотермический процесс ($\bar{V} = \text{const}$)



Нагреваем газ в закрытом сосуде

$dQ = dE$ (всё нагревание идёт на увеличение внутренней энергии)

Число вращений делая на M - молярная масса

Krouter

dQ - газ со стороны

$$\frac{dQ}{dM} = \frac{dE}{dM} \Rightarrow q = \frac{Q}{M}, \quad \epsilon = \frac{E}{M} - \text{удельная теплота и энергия единицы массы}$$

Отметим, что вообще говоря, $dQ = dA + dE$ (но в таком случае $dA=0$)

Итак: $dq = d\epsilon$

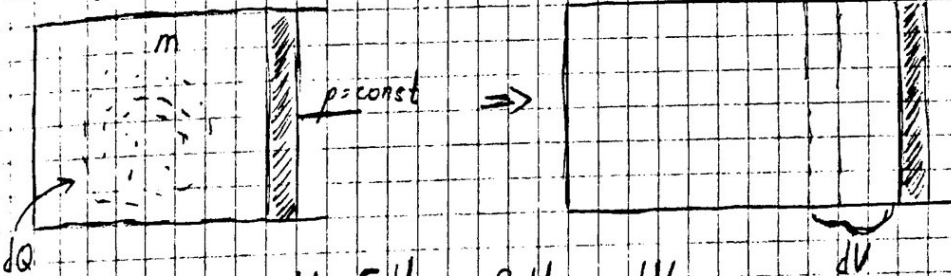
Теплоёмкостью называется $c = \frac{dQ}{dT}$ (характеристика процесса, а не вещества)

$$dQ = dA + dE \mid : dT \Rightarrow c = \frac{dA}{dT} + \frac{dE}{dT} = \frac{dE}{dT}$$

$c_v = \frac{dE}{dT}$ - теплоёмкость при постоянном объёме (моларная (разделится ещё на M) для изохорического процесса)

$$\Rightarrow \epsilon = c_v \cdot T, \quad d\epsilon = c_v dT, \quad dq = c_v dT$$

② Изобарический процесс ($p = \text{const}$)



$$dA = F dl = p S dl = p dV$$

$$p V_m = RT - \text{уравнение Менделеева - Клапейрона} \Rightarrow p dV = R dT$$

$$dQ = dE + dA \Rightarrow dq = d\epsilon + \frac{dA}{M} \Rightarrow c = c_v + R$$

Таким образом: $c_p = c_v + R$, R - универсальная газовая постоянная, $R = \frac{R_A \cdot k}{M}$, k - константа Больцмана

$$dq = d\epsilon + p d\left(\frac{V}{M}\right) = d\epsilon + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$dq = d\epsilon + p d\eta \Rightarrow c_p = \frac{dq}{dT} \Rightarrow dq = c_p dT = (c_v + R) dT$$

Отметим:

$$p = pRT \quad (\text{закон М-К для идеального газа})$$

$$p = pR \frac{E}{c_v} = p \frac{R}{c_v} E = p \left(\frac{c_p - c_v}{c_v} \right) E = p \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) E = \left\{ \frac{c_p}{c_v} = \gamma \right\} = p(\gamma - 1)E$$

③ Адиабатический процесс ($dq = 0$, тепловыделение равно нулю)

$$dE + p d\eta = 0 \quad (*) \quad (\text{уравнение адиабатичности})$$

$$p = pRT \Rightarrow \frac{p}{T} = R \Rightarrow p\eta = RT, \quad R = c_p - c_v$$

$$p\eta = (c_p - c_v)T \cdot \frac{E}{c_v} = \left(\frac{c_p - c_v}{c_v} \right) T \cdot c_v = (\gamma - 1)E \quad (\text{по уравнению (*)})$$

$$\Rightarrow d(p\eta) = (\gamma - 1)dE \quad (**)$$

$$\text{из } (*): (\gamma - 1)dE + (\gamma - 1)p d\eta = 0 \Rightarrow p d\eta + \eta dp + (\gamma - 1)p d\eta = 0$$

$$\Rightarrow \gamma p d\eta + \eta dp = 0 \quad | : p\eta$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d\eta}{\eta} + \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \gamma d \ln \eta + d \ln p = 0$$

$$\Rightarrow d \ln \eta^\gamma + d \ln p = 0 \Rightarrow d(\ln \eta^\gamma + \ln p) = 0 \Rightarrow d(\ln(\eta^\gamma p)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p\eta^\gamma = \text{const}} \quad \text{или же} \quad \boxed{\frac{p}{p_0} = \text{const}}$$

S - энтропия - функция состояния газа

$$dS = \frac{dQ}{T} - \text{уравнение энтропии}$$

$$dS = \frac{dq}{T} = \frac{dE + p d\eta}{T} = \frac{c_v dT + pRT d\eta}{T} = c_v \frac{dT}{T} + pR d\eta = c_v \left(\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v} d\eta \right) =$$

$$= c_v \left(\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v} \frac{d\eta}{\eta} \right) = c_v \left(\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{d\eta}{\eta} \right) = c_v (d \ln T + (\gamma - 1) d \ln \eta) =$$

$$= c_v d \ln(T \eta^{\gamma-1}) = c_v d \ln \left(\frac{T}{\eta} \eta^\gamma \right) = c_v d \ln(T p \eta^\gamma) = c_v d \ln \left(\frac{p}{p_0} \eta^\gamma \right) = c_v d \ln p \eta^\gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{S = c_v \ln(T \eta^{\gamma-1}) + S_0}, \quad \boxed{S = c_v \ln(p \eta^\gamma) + S_0} = c_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + S_0$$

$$\frac{p}{p_0} = \text{const} - \text{адиабата} \Rightarrow dS = 0$$

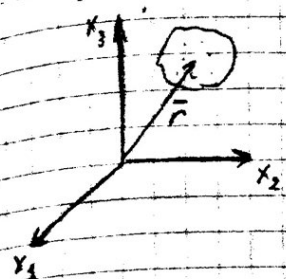
Krouten

1 начало термодинамики - энтропия не может убывать $\Rightarrow dS \geq 0$

§3 Подходы Эйлера и Лагранжа к описанию движения сплошной среды

1) Подход Эйлера (переменные Эйлера)

Наблюдение за точками физического пространства



Ищем параметры (скорость, давление) в этих точках в каждый момент времени

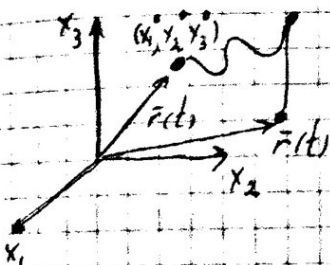
$$\vec{v}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t) = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$$

$f(t, x_1, x_2, x_3)$ - общий вид всех функций

Здесь $\vec{r}$ не зависит от времени, это координаты точки физического пр-ва

2) Подход Лагранжа (переменные Лагранжа)

Наблюдение ведётся за фиксированной частицей среды (она может двигаться)



$$f(\vec{r}(t), t)$$

Чисто в качестве переменных выбирают координаты начального положения каждой частицы

$$f(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0), \vec{r}(t), x_i = x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) - \text{Закон движения}$$

Подходы Эйлера и Лагранжа эквивалентны

1 Пусть есть лагранжевы координаты

$$f(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad x_i = x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad i=1,2,3$$

Переходим систему относительно x_i^0 : $x_i^0 = x_i^0(t, x_1, x_2, x_3) \quad i=1,2,3$

(Это возможно, если якобиан преобразования не равен 0 во все моменты

$$\text{времени: } \Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} \neq 0)$$

Эксперт

2. Пусть задана перемешанная Эйлера

$$f(t, x_1, x_2, x_3), \quad \bar{J} = \frac{df}{dt}, \quad \frac{dx_i}{dt} = 0(t, x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

Пропитеруемо от 0 до $t \Rightarrow x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\zeta, x_1(\zeta, x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_2(\zeta, x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_3(\zeta, x_1^0, x_2^0, x_3^0)) = f(\zeta, x_1^0, x_2^0, x_3^0) -$$

- переменные лиризма.

Связь между Эйлеровой и лагранжевой производной по времени

$$f = f(t, x_1(t), x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_2(t), x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_3(t), x_1^0, x_2^0, x_3^0))$$

Рассмотрим x_1^0, x_2^0, x_3^0 и продифференцируем по t :

$\frac{\delta F}{\delta \psi}$ — производная Лагранжа (полная или субстанциональная) —

- характеризует изгибания, которые происходят с выделенной частицей
вдоль её траектории

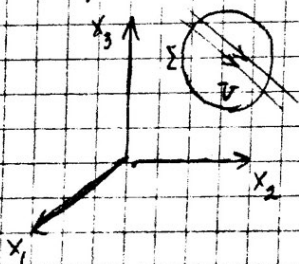
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (p, v) f \right] = \frac{df}{dt}$$

↑ ↑
производная Эйнштейна производная Липсона

§4. Интегральная форма уравнений газовой динамики

Закон сохранения массы, импульса, энергии

4.1. Уравнение неразрывности в интегральной форме в переменных Эйлера



$\bar{V}$ - выделяемый объём пр-ва в котором течёт газ

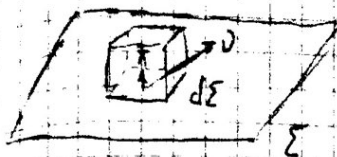
Σ - шаровая поверхность, ограничивающая V

m - масса газа в этом объёме в момент t

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t) d\vec{V}, \quad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3) - \text{популяр-координаты}$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3, \quad \rho - \text{плотность газа в элементе объема}$$

Kroyter



$\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к
этой поверхности $d\Sigma$

Баланс вещества за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Sigma$$

$$\Rightarrow \int_V \rho(\vec{r}, t_2) dV - \int_V \rho(\vec{r}, t_1) dV = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \rho(\vec{r}, t) \cdot (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}) d\Sigma$$

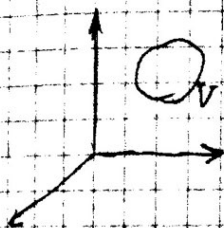
$$\Rightarrow \int_V (\rho(\vec{r}, t_2) - \rho(\vec{r}, t_1)) dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \rho(\vec{r}, t) (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}) d\Sigma = 0 \quad (12.3)$$

Интегральная форма ЗСМ в переменных Эйлера (уравнение неразрывности)

4.2. Уравнение движения в интегральной форме в переменных Эйлера

(Закон сохранения импульса)

Пусть в среде действует некоторая внешняя сила с объемной
плотностью



$$\int_V \rho \vec{v} dV$$

- количество движения в V

За счет чего изменение?

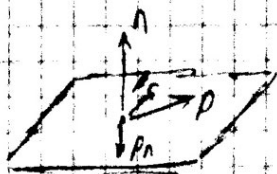
1) Вытекание газа 2) Внешние силы

$$\rho = mV$$

1) В единицу времени выносится некоторое количество вещества с
импульсом: $\int_{\Sigma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Sigma \cdot \rho \cdot \vec{v}$

2) $F(\vec{r}, t)$ - внешняя сила в единицу времени: $\int F dV$

3) Действует сила со стороны остальной массы газа (поверхностного
характера)



p_t - касательная составляющая связана
с количеством движения
(в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$)
Кривизна

В идеальном газе $p_n = -p\vec{n}$, p - гидростатическое давление
 $\vec{F} dt$ - импульс внешних сил (со стороны остальной массы газа)
 $\frac{p_n d\Sigma}{F}$

$$\int_V (p(\vec{r}, t_2) \vec{\sigma}(\vec{r}, t_2) - p(\vec{r}, t_1) \vec{\sigma}(\vec{r}, t_1)) dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} ((\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{\sigma} p + p_n) d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \vec{F} dV$$

(2UЭ)

Интегральная форма ЗСД в переменных Эйлера (уравнение движения)
 Это векторное уравнение!

4.3. Уравнение энергии в интегральной форме в переменных Эйлера

$$\int_V \rho \left(\epsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) dV - \text{полная энергия (внутренняя + кинетическая) в объёме } V$$

Изменение энергии!

1) Выход за поверхность

2) Работа внешних сил (объёмных и поверхностных)

3) Действие внешних источников

Пока смотрим
 это

$$\int_V \left(\rho(t_2, \vec{r}) \left(\epsilon(t_2, \vec{r}) + \frac{\vec{v}^2(t_2, \vec{r})}{2} \right) - \rho(t_1, \vec{r}) \left(\epsilon(t_1, \vec{r}) + \frac{\vec{v}^2(t_1, \vec{r})}{2} \right) \right) dV =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho \left(\epsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} (\vec{p}_n \cdot \vec{\sigma}) d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV$$

(3UЭ)

Интегральная форма ЗСЭ в переменных Эйлера

1UЭ, 2UЭ, 3UЭ - уравнения (5 уравнений)
 векторное

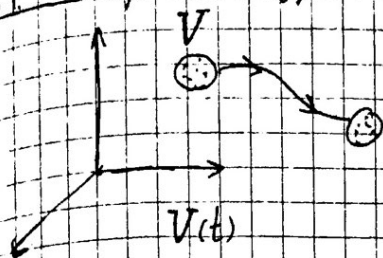
$\rho, p, \epsilon, \vec{\sigma}$ (6 неизвестных)

+ ещё одни переменные (температура, T) и + 2 уравнения состояния

Kroyter $(p = p(\rho, T), \epsilon = \epsilon(\rho, T))$

3 §С и уравнения состояния составляют замкнутую систему уравнений газовой динамики

4.4 Интегральные уравнения в переменных Лагранжа



$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$V(t)$ может деформироваться, но ка-во частиц не меняется, масса газа остаётся прежней

$$\int_{V(t_2)} \rho(\vec{r}, t_2) dV = \int_{V(t_1)} \rho(\vec{r}, t_1) dV \quad (1.1.1)$$

$$\int_{V(t_2)} \rho(\vec{r}, t_2) \vec{v}(\vec{r}, t_2) dV - \int_{V(t_1)} \rho(\vec{r}, t_1) \vec{v}(\vec{r}, t_1) dV = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma(t)} p_n d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \vec{F} dV$$

(2.1.1)

$$\int_{V(t_2)} \rho(\vec{r}, t_2) \left(\vec{e}(\vec{r}, t_2) + \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{r}, t_2)}{\partial t^2} \right) dV - \int_{V(t_1)} \rho(\vec{r}, t_1) \left(\vec{e}(\vec{r}, t_1) + \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{r}, t_1)}{\partial t^2} \right) dV =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma(t)} (\vec{p}_n, \vec{j}) d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} (\vec{F}, \vec{j}) dV \quad (3.1.1)$$

В переменных Лагранжа также нужно в каждый момент времени искать положение в пр-ве:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \vec{r}(t_2, \vec{r}^0) - \vec{r}(t_1, \vec{r}^0) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t, \vec{r}) dt$$

§5 Уравнения газовой динамики в дифференциальной форме (появляются ограничения на допустимые решения)

5.1. Уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\int_V (\rho(r, t_2) - \rho(r, t_1)) dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho(r, t) (\vec{v}(r, t), \vec{n}) d\Sigma$$

$\forall \Sigma, \rho, v$ таковы, что эти интегралы существуют.

1) Формула Остроградского - Гаусса: $\int_V \operatorname{div} \vec{f} dV = \int_{\Sigma} (\vec{f}, \vec{n}) d\Sigma$

$$\int_{\Sigma} \rho(r, \vec{v}, \vec{n}) d\Sigma = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

(сначала её среднюю) t_2

2) По I теореме о среднем: $\int_{t_1}^{t_2} f(t, r) dt = \underbrace{f(t^*, r)}_{\int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV} (t_2 - t_1), t_1 \leq t^* \leq t_2$

3) $\int_V (\rho(r, t_2) - \rho(r, t_1)) dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho(r, t^*) \vec{v}(r, t^*)) dV \cdot (t_2 - t_1) \quad | : \Delta t = t_2 - t_1$

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\rho(r, t_2) - \rho(r, t_1)}{\Delta t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \Big|_{t=t^*} \right) dV = 0$$

4) $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\rho(t_2, r) - \rho(t_1, r)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ — производная по времени Эйлера

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

В силу произвольности выделенного объёма $V \Rightarrow$ подынтегральная р-ция = 0:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (1.2.3)$$

5.2. Уравнение движения в дифференциальной форме

$$\int_V [\rho(r, t_2) - \rho(r, t_1)] dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho \vec{v} (\vec{v}, \vec{n}) d\Sigma - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} p_n d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F dV$$

1) I теор. о среднем, делим на Δt :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, \vec{r}) dt = f(t^*, \vec{r}) (t_2 - t_1)$$

$$\text{при } \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u})$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma + \int_V \vec{F} dV$$

2) Проектируем на координатное направление x_i :

$$\int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV = \int_{\Sigma} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \left(\int_{\Sigma} p n_i d\Sigma \right)_{x_i} + \int_V F_i dV$$

$$3) \int_{\Sigma} (\rho u_i \vec{u} \cdot \vec{n}) d\Sigma = \int_V \operatorname{div}(\rho u_i \vec{u}) dV \quad (\text{формула О-Г})$$

$$\left(\int_{\Sigma} p n_i d\Sigma \right)_{x_i} = \int_V (\operatorname{grad} p)_{x_i} dV$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho u_i \vec{u}) dV - \int_V (\operatorname{grad} p)_{x_i} dV + \int_V F_i dV$$

$\Rightarrow \int_V \dots = 0$; В силу произвольности объема:

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \operatorname{div}(\rho u_i \vec{u}) + (\operatorname{grad} p)_{x_i} = F_i \quad i=1,2,3 \right\}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \operatorname{div}(\vec{u}) + (\rho \vec{u}, \nabla) u_i + (\operatorname{grad} p)_{x_i} = F_i$$

$= 0 \quad \text{из 1.4.3}$

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{A}) = \lambda \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{A}, \nabla) \lambda \Rightarrow \lambda = u_i, \vec{A} = \rho \vec{u}$$

$$\Rightarrow \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + \rho (\vec{u}, \nabla) u_i + (\operatorname{grad} p)_{x_i} = F_i \quad i=1,2,3 \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u_i + (\vec{u}, \nabla) u_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i \quad i=1,2,3 \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\vec{F}}{\rho} \right\} \quad (2.2.3)$$

5.3. Уравнения Эйлера в дифференциальной форме

$$\int_V \rho \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} (p \vec{n}, \vec{u}) d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\vec{F}, \vec{u}) dV$$

(Krouter)

1) Теорема о среднем 3) $\Delta t \rightarrow 0$

2) Возьмем как $\Delta t = t_2 - t_1$ 4) Применяем О-Т при переходе от пол. инт. к обн.

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right) dV = - \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{u} \left(e + \frac{v^2}{2} \right)) dV - \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{u}) dV + \int_V (\vec{F}, \vec{u}) dV$$

$$\Rightarrow \int_V \dots = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} (\rho \vec{u} \left(e + \frac{v^2}{2} \right)) + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = (\vec{F}, \vec{u})$$

$$\left(e + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} (\rho \vec{u}) + (\rho \vec{u}, \nabla) \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = - \operatorname{div} (\rho \vec{u}) + (\vec{F}, \vec{u})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{u}, \nabla) \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\rho \vec{u}) + \frac{(\vec{F}, \vec{u})}{\rho}} \quad (3.2.3)$$

Теперь выпишем всю систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad \text{векторное} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{u}, \nabla) \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\rho \vec{u}) + \frac{(\vec{F}, \vec{u})}{\rho} \end{cases}$$

Неизвестные: $\rho, \vec{u}, p, e \Rightarrow 6$ кувл, 5 ур.

$\Rightarrow$ добавим кувл. T + 2 связи: $\rho = \rho(p, T), e = e(p, T)$

$$\left(\rho = \rho(p, T), e = \frac{RT}{\gamma - 1} \right)$$

Конкретика задачи - в ур-е состояния.

Первые 3 ур-я инвариантны относительно состояния.

§6 Дифференциальные уравнения газовой динамики в переменных Лагранжа

Лагранжа

Уравнение неразрывности (1.11):

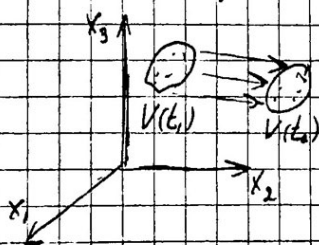
$$\int_{V(t_2)} \rho(r, t_2) dV = \int_{V(t_1)} \rho(r, t_1) dV$$

Разделим на $\Delta t = t_2 - t_1$, и $\Delta t \rightarrow 0$, в пределе получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

направляем производная

Дифференцирование вдоль траектории частицы газа (составляющих объема $V(t)$)



$$dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$$

по сути интегрирование ведется в переменных Эйлера

Сделаем замену переменных, перейдем к переменным Лагранжа

x_1^0, x_2^0, x_3^0 (как положение частицы среды)

$$dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = \Delta dx_1^0 \cdot dx_2^0 \cdot dx_3^0, \quad \Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}$$

Якобиан преобразования

$V(t) \rightarrow V^0$, V^0 не зависит от времени

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V^0} \rho \cdot \Delta \cdot dV^0 = \int_{V^0} \frac{d}{dt} (\rho \Delta) dV^0 = 0$$

В силу произвольности объема V^0

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} (\rho \Delta) = 0} \quad (1.12)$$

Дифференциальное ур-е неразрывности в переменных Лагранжа

Уравнение движения (2D1):

$$\int_{V(t_1)} \rho(r, t_1) v(r, t_1) dV = \int_{V(t_2)} \rho(r, t_2) v(r, t_2) dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma(t)} p n d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V(t)} F dV$$

1) I теор. о среднем

2) Разделим на $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(r, t) v(r, t) dV = - \int_{\Sigma(t)} p n d\Sigma + \int_{V(t)} F dV$$

3) Формула О-Г $\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(r, t) v(r, t) dV = - \int_{V(t)} \text{grad} p dV + \int_{V(t)} F dV$

4) $dV \rightarrow dV^0$ $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v dV = \frac{d}{dt} \int_{V^0} \rho v \Delta dV^0$; $\int_{V(t)} \text{grad} p dV = \int_{V^0} \text{grad} p \Delta dV^0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V^0} \rho v \Delta dV^0 &= \int_{V^0} \frac{d}{dt} (\rho v \Delta) dV^0 = \int_{V^0} \left(\underbrace{\frac{d}{dt} (\rho \Delta)}_{\text{от 2D1}} v + \rho \Delta \frac{d}{dt} v \right) dV^0 = \\ &= \int_{V^0} \rho \Delta \frac{d}{dt} v dV^0 \end{aligned}$$

$$\int_{V^0} \rho \Delta \frac{d}{dt} v dV^0 = - \int_{V^0} \text{grad} p dV^0 + \int_{V^0} F dV^0 = 0$$

$\Rightarrow$ в силу произвольности $V^0 \Rightarrow \boxed{\rho \frac{d}{dt} v + \text{grad} p = F}$ (2D1)

↑
Уравнение движения в параллельных линиях

Аналогично получаем уравнение энергии:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \text{div} (\rho \bar{\sigma}) + \frac{(F, v)}{\rho}} \quad (3D1)$$

§7 Различные формы уравнения Энтальпии (Энтальпийная форма уравнения энергии)

Без учёта внешних сил

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 & \text{с учетом: } \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) f = \frac{df}{dt} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p & \xrightarrow{\quad} \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + (\mathbf{v}, \nabla) \left(\epsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) & \xrightarrow{\quad} \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \\ p = \rho R T, \quad \epsilon = C_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} \end{cases}$$

Уравнение движения умножим на $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} p), \quad \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \rho)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} p) \quad (*)$$

$$\frac{d}{dt} \epsilon + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{v}, \operatorname{grad} p) \quad (**)$$

$$\Rightarrow (**) - (*) : \quad \boxed{\frac{d}{dt} \epsilon = -\frac{1}{\rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{v}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \epsilon + (\mathbf{v}, \nabla) \epsilon = -\frac{1}{\rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{v}}$$

Уравнение для внутренней энергии (по сути закон сохранения внутренней эн.)

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \rho) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\rho}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{Вспомогательный кто } \eta = \frac{1}{\rho})$$

$$\text{Уравнение для внутренней энергии} \Rightarrow \boxed{\frac{d\epsilon}{dt} + \rho \frac{d\eta}{dt} = 0}$$

Энтропийная форма уравнения энергии

Вспомогательный: $\int$ начало периодичности для адиабатического случая

$$dq = de + p d\eta = 0 \Rightarrow T \frac{ds}{dt} = \boxed{\frac{d\epsilon}{dt} + p \frac{d\eta}{dt}} \Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt} = 0}$$

$$(\oplus) \quad dq = T ds$$

$S(\rho, T)$ - энтропия единицы массы газа

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ В жидкой частице энтропия постоянна, т.е. нет обмена энергией с другими частицами

(1) $\phi = \text{const}$

Энтропия, "попавшая" в частицу сохраняется, но не

(2) $\phi = \text{const}$

может переместиться от частицы к частице.

В переменных Эйлера: $\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) S = 0$ (для идеального газа)

$$dS = \frac{dE + p d\eta}{T} = \left\{ e = c_v T, T = p \eta^{\frac{1}{\gamma}}, \eta = c_p - c_v, \frac{p}{T} = \gamma \right\} = c_v \left(\frac{1}{T} + (\gamma - 1) \frac{d\eta}{\eta} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + S_0 \quad (\text{вспомогательный})$$

Подставим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + S_0 \right) = c_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \cdot \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)^{-1}$$

$$\nabla S = \nabla \left(c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + S_0 \right) = c_v (\nabla \frac{p}{\rho^\gamma}) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow c_v \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + c_v \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)^{-1} (\vec{v}, \nabla) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma \frac{p}{\rho^{\gamma+1}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad | \cdot \rho^\gamma$$

$$= \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) p - \gamma p \text{div} \vec{v} = -p \text{div} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) p + \gamma p \text{div} \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) p + \gamma p \text{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{Энтропическая форма ур-я энергии для идеального газа})$$

§8 Интеграл Бернулли

$$\text{Ур. гидр.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0$$

$$T dS = dq = dE + p d\eta$$

$$T \nabla S = \nabla E + p \nabla \eta$$

$$\rightarrow T \nabla S = \nabla \epsilon + \nabla (p\eta) - \eta \nabla p = \nabla (\epsilon + p\eta) - \eta \nabla p$$

$$h = \epsilon + p\eta \quad \text{Энтальпия}$$

$$\Rightarrow \eta \nabla p = \nabla h - T \nabla S$$

$$\text{Ур. движение перенесем: } \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla h = T \nabla S$$

Взвешивая на $\mathbf{v}$ (скалярно)

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}^2}{2} + (\mathbf{v} \nabla) h = T (\mathbf{v} \nabla) S + \frac{\partial h}{\partial t} - T \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}}_{\frac{dh}{dt}} + (\mathbf{v} \nabla) h - \frac{\partial h}{\partial t} = T \left(\underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\frac{dS}{dt}} + (\mathbf{v} \nabla) S \right) - T \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h \right) - \frac{\partial h}{\partial t} = T \cdot \frac{dS}{dt} - T \frac{\partial S}{\partial t}$$

Случаи:

$$1) \text{ Течение стационарно. } \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \right) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$2) \frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{уравнение энергии в экстремальной форме}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h = \text{const}} - \text{интеграл Бернулли} \\ - \text{постоянная вдоль траекторий} \\ \text{текущей частицы}$$

Глава 2 Одномерные нестационарные течения идеального газа

§1 Масловые координаты Лагранжа

* одномерное плоское неустойчивое течение газа

$$1) \text{ одномерное: } \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \neq 0$$

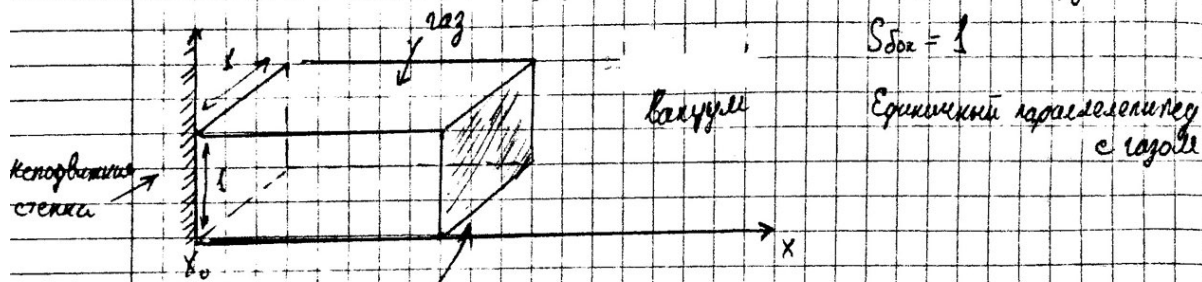
$$2) \text{ плоское: } \vec{\mathbf{v}} = \{v, 0, 0\}$$

$$3) \text{ нестационарное (неустойчивое): } \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \neq 0$$

Запискам систему уравнений газовой динамики в перекрывающемся Эйлери
с этими приближениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p u) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \quad (*)$$

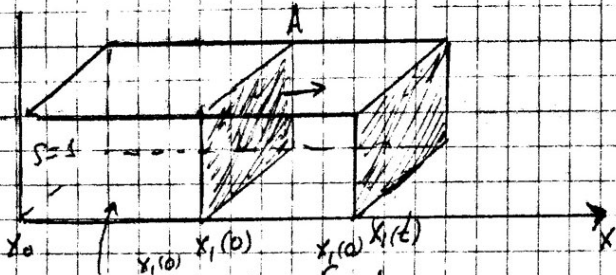
Введем ларанжевы массовые координаты (на примере одномерной плоской нестационарной задачи об истечении газа в вакуум)



При $t=0$ стенка убирается, начинается процесс.

Из однородности $\Rightarrow$ траектория частицы $\parallel$ оси X

Объём парам. будет меняться со временем, но частицы газа его не покидают, масса останется такой же

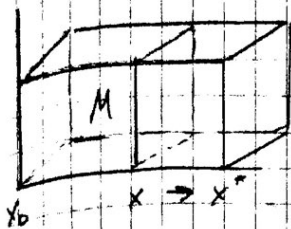


$$S = \int_{x_0}^x \rho S dx = \int_{x_0}^x \rho dx - \text{масса газа, попавшая в сечение } A \text{ в}$$

как момент ($t=0$)

$$S = \int_{r_0} p dr \quad \text{Масса газа не меняется}$$

$S = \int_{x_0}^x \rho(y, t) dy$ - устанавливает соответствие между x и S



x : от x_0 , $x_1(t)$

S : от 0 до M - масса газа в паралл. канальчике

S - массовая координата Лагранжа

Перейдём от переменных Эйлера к массовым коорд. Лагранжа

$(t, x) \rightarrow (t, S)$, $t_{\text{Эйлера}} = t_{\text{Лагранжа}}$ (время течёт одинаково)

$f(t, x) \rightarrow f(t, S)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} = 0$$

$$S = \int_{x_0}^x \rho(y, t) dy \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = \rho(x, t)$$

Каждому вычитаемому для $\frac{\partial S}{\partial t} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t} \rho(y, t) dy = - \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} (\rho(y, t) v(y, t)) dy =$

уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)$$

$$= -\rho v|_x + \rho v|_{x_0}$$

Если $v(x_0) = 0 \Rightarrow$ левая граница неподвижна (в нашем случае выполняется)

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -\rho v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial S} (-\rho v) + \frac{\partial f}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial S} \rho \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - \rho v \frac{\partial}{\partial S}} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial S}}$$

Отметим: $\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \rho v \frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial t} + \rho v \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$

- совпадает с субстанциональной производной

Преобразуем уравнение газовой динамики (*):

$$1) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \rho - \rho v \frac{\partial \rho}{\partial S} + \rho \frac{\partial}{\partial S} (\rho v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d \rho}{dt} - \rho v \frac{\partial \rho}{\partial S} + \rho v \frac{\partial \rho}{\partial S} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2} \frac{d \rho}{dt} + \frac{\partial v}{\partial S} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial S}}$$

$$2) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} - \rho v \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + v \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{\partial p}{\partial s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s}}$$

$$3) \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) - \rho v \frac{\partial}{\partial s} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + v \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho v)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \\ p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T) \\ \frac{dx}{dt} = v \text{ — т.к. переменные Лагранжа} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \text{ — т.к. переменные Лагранжа} \end{cases}$$

§2 Линейное приближение уравнений газовой динамики

Акустическое приближение — «слабые» возмущения, т.е. все параметры мало отклоняются от некоторых исходных значений (фона)

Постановка задачи

Контр. пр-во заполнено покоящимся ($v_0 = 0$) газом. Начальные значения параметров обозначим $\rho_0, p_0, v_0 = 0$

Далее вносим малое возмущение $\tilde{\rho} \ll \rho_0, \tilde{p} \ll p_0$ + производные от возмущения малы

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad p = p_0 + \tilde{p}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \rho = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) S = 0 \quad (\text{изотропная форма})$$

$$\rho = \rho(p, S)$$

$S = S_0$ - постоянна по пр-ва (изотропический случай)

$$S(p, T) \Rightarrow T(p, S) \Rightarrow \rho(p, T) \Rightarrow \rho(p, S) = \rho(p, S_0)$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{S=S_0} \Rightarrow \tilde{\rho} = c_0^2 \tilde{p}$$

$$1) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) (\rho_0 + \tilde{\rho}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}}_{\text{малая 2-го порядка}} + \rho_0 \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) + \underbrace{\tilde{\rho} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}})}_{\text{малая 2-го порядка}} + \underbrace{(\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \rho_0}_{=0} + \underbrace{(\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\rho}}_{\text{малая 2-го порядка}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0} \quad - \text{линеаризованное ур-е неразрывности}$$

$$2) \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \rho + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0$$

$$\nabla p = \nabla p(p, S_0) = \left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{S=S_0} \nabla p = c_0^2 \nabla p$$

$$\Rightarrow (\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + c_0^2 \nabla (\rho_0 + \tilde{\rho}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \tilde{p} = 0}$$

Итого:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \tilde{p} = 0 \end{cases}$$

Линейное приближение УГД

§3 Распространение малых возмущений. Скорость звука

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & (1) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \operatorname{grad} p = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Переменные: } \begin{cases} \tilde{p} \rightarrow p \\ \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{v} \\ \tilde{\rho} \rightarrow \rho \end{cases}$$

Исключим одну из переменных (незав. функции). Например, ρ .
Krouter